(18)

SULLE CONICHE

CHE PASSANO PER TRE PUNTI DATI
E TOCCANO DUE RETTE DATE

NOTA

DI

GIUSEPPE BRUNO

TORINO
ERMANNO LOESCHER
Libraio della R. Accademia delle Scienze.
1881

SULLE CONICHE

CHE PASSANO PER TRE PUNTI DATI E TOCCANO DUE RETTE DATE

NOTA

DI

GIUSEPPE BRUNO

TORINO
ERMANNO LOESCHER
Libraio della R. Accademia delle Scienze.
1881

SULLE CONICHE

CHE PASSANO PER TRE PUNTI DATI E TOCCANO DUE RETTE DATE

1. Si sa che di coniche passanti per tre punti dati A, B, C e tangenti due rette date s, t ve ne hanno quattro: ed è nota una costruzione elegante, colla quale si determinano i punti di loro contatto colle rette s, t, e si riduce perciò il problema di tracciare una qualunque di esse al problema di segnare una conica, che passi per cinque punti dati.

Io mi propongo di esporre un'altra costruzione delle coniche, di cui si tratta, dalla quale risultano alcune proposizioni relative alle coniche stesse, e particolarmente le seguenti:

1° Le quattro coniche, che passano per tre punti dati A, B, C, e toccano due rette date s, t, sono tali che la congiungente il punto differente da A, B, C, che è comune a due qualunque di esse, col punto pur differente da A, B, C, che è comune alle altre due, passa per il punto I d'intersezione delle rette s, t.

2° Le stesse quattro coniche sono tali che la congiungente il punto d'intersezione delle due tangenti diverse da s e da t, che sono comuni a due qualunque di esse coniche, col punto d'intersezione delle due tangenti pure diverse da s e da t, che sono comuni alle altre due di quelle coniche, passa per uno dei tre punti dati A, B, C.

2. A tal fine premetto che il quadrangolo dei quattro punti comuni a due coniche qualunque ed il quadrilatero delle quattro tangenti comuni alle stesse coniche hanno un medesimo triangolo

diagonale (1): e che è pur vera la proposizione inversa, che, cioè, se un quadrangolo ed un quadrilatero hanno lo stesso triangolo diagonale, esistono due coniche, le quali sono, ad un tempo, circoscritte al quadrangolo ed iscritte nel quadrilatero, e queste sono le due coniche, che passano pei quattro vertici del quadrangolo e toccano un lato del quadrilatero, o toccano i quattro lati del quadrilatero e passano per uno dei vertici del quadrangolo.

Segue da ciò che, se noi costrurremo un quadrangolo A B C D (ved. figura annessa) del quale i punti dati A, B, C sieno tre vertici, ed un quadrilatero $stuv$, di cui le due rette date s, t sieno due lati, i quali abbiano lo stesso triangolo diagonale, due delle coniche passanti pei punti A, B, C e tangenti le rette s, t passeranno anche pel punto D e toccheranno anche le rette u, v: epperò noi sapremo costrurre queste due coniche, considerandole come le due, che passano pei punti A, B, C, D e toccano la retta s, oppure come le due, che toccano le rette s, t, u, v e passano pel punto A.

Ora i vertici del triangolo P Q R diagonale del quadrangolo A B C D giacciono uno su ciascuno dei tre lati cogniti A B, C A, B C di esso quadrangolo: sia P il vertice di detto triangolo, che è posto sopra A B, e gli altri due vertici Q ed R del medesimo sieno situati rispettivamente sopra C A e sopra B C.

Similmente, i lati del triangolo diagonale di un quadrilatero contengono ciascuno una coppia di vertici opposti di esso quadrilatero: e poichè il quadrilatero $stuv$, che vogliamo costrurre, ha anch'esso per suo triangolo diagonale il triangolo P Q R, un lato, che supporremo sia P Q, di questo passerà pel vertice noto del detto quadrilatero, che è posto nell'intersezione I dei due lati dati s e t di questo quadrilatero.

Le coppie di rette I A, I D; I B, I C; I P, I Q condotte da I alle coppie di vertici opposti del quadrilatero formato dalle rette A C, C D, D B, B A sono coniugate in involuzione fra loro. E siccome I P coincide con I Q, come si è detto, la retta I Q P è un raggio doppio di questa involuzione: l'altro raggio doppio dell'involuzione stessa è manifestamente I R, poichè I R è armonica coniugata di I Q P rispetto ad I B ed I C.

---

(1) Poncelet, *Traité des propriétés des figures*. Paris, 1865, tome premier, pag. 186-87.

Nel quadrilatero poi $stuv$ l'angolo formato in I dai suoi lati s e t è diviso armonicamente dal lato IQP del suo triangolo diagonale, che passa per I, e dalla retta che congiunge I col vertice R di detto triangolo; cioè le rette s e t formano una coppia di raggi coniugati dell'involuzione suddetta. E siccome questa coppia di raggi s, t è data, e sono pure dati i due raggi coniugati IB, IC, saranno determinati e si potranno costrurre i raggi doppi IQP, IR di quell'involuzione, ed il raggio ID di essa che è coniugato del raggio dato IA.

I vertici del triangolo PQR saranno dunque conosciuti, perchè P e Q sono le intersezioni di uno, IQP, dei raggi doppi trovati colle rette AB, CA rispettivamente, ed R è l'intersezione dell'altro raggio doppio dell'involuzione colla retta BC. E finalmente sarà pure conosciuto il punto D intersezione del raggio ID poc' anzi determinato con una qualunque delle rette AR, BQ, CP.

Osservando in fine che due vertici opposti di un quadrilatero dividono armonicamente il lato del triangolo diagonale del quadrilatero, su cui sono situati, si avrà che il punto L armonico coniugato di I rispetto ai punti P e Q è l'intersezione dei due lati non dati u e v del quadrilatero $stuv$: e questi lati perciò saranno le congiungenti il punto L ai punti, in cui la retta RQ, oppure la RP, è tagliata dalle rette s e t.

3. Nella costruzione, che abbiamo ora fatto per determinare i punti D e L, dopo aver trovato i raggi doppi ed il raggio coniugato di IA nell'involuzione individuata dalle coppie s, t; IB, IC di elementi coniugati, si è detto che il lato PQ del triangolo PQR è disposto sopra uno dei raggi doppi ora accennati. Ma, due essendo questi raggi doppi, se la costruzione, che si è fatta nel num. prec., assumendo che i vertici P, Q del triangolo PQR cadano sopra uno dei detti raggi doppi, venga ripetuta colla variante, per la quale due vertici del triangolo diagonale debbano trovarsi sull'altro raggio doppio, questi due vertici saranno le intersezioni P' e Q' di IR con AB e CA rispettivamente, ed il terzo vertice R' di quel triangolo sarà il punto, in cui la retta BC è secata dalla IQP.

Allora il quarto vertice D' del quadrangolo a costruirsi sarà la intersezione di ID con una qualunque delle rette AR', BQ', CP', ed i lati u' e v' del quadrilatero differenti da s e da t saranno la congiungente il punto comune a t e P'R' coll'intersezione di s con Q'R', e la congiungente il punto di concorso

di s con $P'R'$ a quello di concorso di t con $Q'R'$. Questi lati poi u' e v' si tagliano nel punto L' della retta $P'Q'$, che è armonico conjugato di I rispetto ai punti P' e Q'.

Frattanto giova notare che la congiungente i vertici non dati D e D' dei due quadrangoli A B C D, A B C D' passa pel punto I intersezione delle rette s e t: e che inoltre, a motivo che le divisioni P Q I L, $P'Q'IL'$ sono projettive, perchè entrambe sono armoniche, ed hanno una coppia di loro elementi corrispondenti sovrapposti in I, la congiungente i punti L, L', che sono i vertici opposti ad I nei quadrilateri $stuv$, $stu'v'$, passa per l'intersezione delle rette PP', QQ', la quale è uno, A, dei tre punti dati A, B, C.

4. Oltre i due quadrangoli A B C D, A B C D', ne esistono altri quattro, ciascuno dei quali ha, come gli ora detti, i punti A, B, C per tre suoi vertici, ed il triangolo diagonale comune con un quadrilatero, due lati del quale giacciono sulle rette s e t. In verità, se invece del fascio in involuzione, di centro I, che si è considerato nei due numeri precedenti, si fosse impiegato l'uno o l'altro dei due fasci in involuzione, che hanno ancora, tutti due, I per loro centro e le rette s e t per una coppia di loro elementi coniugati, ma dei quali una seconda coppia di raggi coniugati è il sistema delle due rette IA, IB, o quello delle due rette IC, IA, ciascheduno di questi due fasci, con costruzioni e ragionamenti in tutto analoghi ai sovraesposti, avrebbe condotto a trovare un'altra coppia di quadrangoli ABCE, ABCE', od ABCF, ABCF', e corrispondentemente un'altra coppia di quadrilateri $stwx$, $stw'x'$ od $styz$, $sty'z'$ soddisfacenti alle condizioni imposte.

La congiungente i vertici E ed E', od F e F' dei due quadrangoli di ciascuna delle dette coppie passa quindi pel punto I, e similmente la congiungente i punti wx, $w'x'$ passa pel punto dato C, e la congiungente i punti yz, $y'z'$ passa pel punto dato B.

5. I ragionamenti istituiti provano che, in generale, vi hanno sei, e non più di sei, quadrangoli, che abbiano per tre loro vertici i punti dati A, B, C e lo stesso triangolo diagonale che un quadrilatero, di cui due lati sono disposti secondo le rette date s e t: e provano inoltre che od i detti sei quadrangoli sono tutti reali, oppure sono reali due soli di essi ed immaginari gli altri quattro, per la ragione che, nel fascio di centro I, i raggi s e t o non sono separati dagli elementi di alcuna delle tre coppie di rette IA, IB; IC, IA; IB, IC, oppure sono separati dagli elementi di due di esse coppie, e non separati dagli elementi della terza rimanente.

Poichè, come si è detto nel 1° alinea del n° **2**, ognuno dei quadrangoli suaccennati determina due coniche passanti pei punti A, B, C e tangenti alle rette s, t, parrebbe che, sei essendo, in generale, quei quadrangoli, dodici fossero le coniche soddisfacenti alle condizioni volute. Ma è facile il dimostrare che di tali coniche, distinte fra loro, ve ne hanno solo quattro. Ed infatti, quattro coniche distinte, le quali abbiano tre punti e due tangenti comuni, danno origine, colle loro intersezioni due a due, a sei quadrangoli distinti, che hanno comuni tre loro vertici, e di ciascuno dei quali il triangolo diagonale è lo stesso che quello di un quadrilatero avente per due suoi lati le due tangenti comuni alle quattro coniche: e di tali quadrangoli fu dimostrato testè che non ve ne sono più di sei.

Perciò, per costrurre le quattro coniche, che passano per A,B,C e toccano le rette s e t, basta ricorrere ad uno solo dei tre fasci in involuzione di centro I, dei quali si è parlato, a quello, *p. es.*, che determina i quadrangoli ABCD, ABCD′, poichè le quattro coniche reali od immaginarie, generalmente distinte fra loro, che toccano la retta s, e passano pei quattro vertici dell'uno, o dell'altro di quei quadrangoli, sono quelle sole, che risolvono il problema.

Tuttavia, se si impiega ancora un secondo dei fasci in involuzione suaccennati, quello, *p. es.*, che determina i quadrangoli ABCE, ABCE′ ed i corrispondenti quadrilateri $stwx$, $stw'x'$, si avranno, per ognuna delle quattro coniche a descriversi, cinque punti e sei tangenti: cioè le quattro coniche domandate saranno rispettivamente circoscritte ai pentagoni ABCDE, ABCDE′, ABCD′E, ABCD′E′ ed iscritte nelle figure di sei lati $stuvwx$, $stuvw'x'$, $stu'v'wx$, $stu'v'w'x'$. Servendosi anche del terzo dei suddetti fasci in involuzione, determinando cioè ancora i quadrangoli ABCF, ABCF′ ed i corrispondenti quadrilateri $styz$, $sty'z'$, si avrà per ognuna delle quattro coniche un sesto punto F od F′ ed un'altra coppia y, z od y', z' di tangenti. E precisamente, quando si convenga che i punti D, E, F sieno tali, che le rette AD, BE, CF dividano rispettivamente i segmenti BC, CA, AB, ciascuno in due segmenti sottrattivi, il punto F e le due tangenti y e z apparterranno alle coniche circoscritte ai pentagoni ABCDE, ABCD′E′, ed il punto F′ colle tangenti y' e z' apparterranno alle coniche circoscritte ai pentagoni ABCD′E, ABCDE′.

Da quanto fu esposto si ricava inoltre che le quattro coniche,

di cui si tratta, sono tutte reali quando ciascuno dei tre fasci in involuzione più volte nominati ha i suoi raggi doppi reali. Se questa circostanza non arriva, uno (uno solo) di essi fasci avrà ancora reali i suoi raggi doppi, esisteranno ancora, come fu già avvertito, due quadrangoli, che hanno ciascuno tre suoi vertici in A, B e C ed il triangolo diagonale comune con un quadrilatero formato sulle rette *s* e *t* come due suoi lati, ma non vi sarà alcuna conica reale, che soddisfi alle condizioni imposte.

6. Quando un punto dato è un fuoco comune a più coniche, questo si può riguardare come il punto di concorso di due loro tangenti date comuni: epperò il metodo esposto precedentemente serve alla costruzione delle coniche, che hanno il punto dato I per un loro fuoco e passano pei tre punti dati A, B, C. Queste coniche sono quattro, sempre reali: e se sia D il punto differente da A, B, C, che è comune a due qualunque di esse, e D' il punto pur differente da A, B, C, che è comune alle altre due, la congiungente i punti D e D' passa pel fuoco comune I delle quattro coniche. Le stesse coniche, considerate due a due, hanno comuni, oltre le tangenti immaginarie condotte pel loro fuoco I, due tangenti, esse pure immaginarie, ma concorrenti in un punto reale: se dicasi L questo punto di concorso relativo a due qualunque delle quattro coniche ed L' il punto analogo relativo alle altre due, la congiungente L con L' passa per uno dei tre punti dati A, B, C.

7. È poi manifesto che le proposizioni dimostrate e le costruzioni eseguite hanno le loro correlative riflettenti le coniche, che passano per due punti dati e toccano tre rette date.

Torino Lit. Salussolia